# Matheseos fundamenta nova analytica,

Dissertatio,

quam

Consent. Ampliss. Facult. Philos. Lundens.

Præside

**Mag. CAROLO JOH. Ds HILL,**

Math. Prof.

pro Laurea defendit



**CAROLUS WILH. HULTMARK,**

Cand. Philos., Blekingus.

In Audit. Mathem. die xv Aprilis MDCCCXLVIII.

II.

**Lundæ,**
typis Berlingianis,
MDCCCXLVIII.

Et primum harum operationum *uniformium* leges feramus; deindeque disquiramus, quid illa diversitas sibi velit. Hoc vero universim in usu hujus axiomatis tenendum est, quoties una alterave æqualitatis pars ex duobus pluribusve quantis cum suis vinculis composita fuerit (ut si $a = b+u$ fuerit), tum hanc $b+u$, priusquam alii ($c$) jungatur, his ( ) uncinis cingendam vel in $(b+u)$ claudendam esse, quod ideo unicum quantum indicat, ut inde sit $a|c = (b+u)|c$ vel $= \widehat{b+u}|c$.

Huic axiomati accedit generale et in tota mathesi fundamentale: quantum quoduis ($A$) *sibi semper* æquari, seu $A = A$ esse: id quod sibi hoc vult, ipsum $A$, quamquam omnes valores recipere vel repræsentare possit, tamen in unoquoque casu vel in eadem demonstratione ubique unicum eundemque valorem tantum significare, ideoque quoad quantitatem revera identicum esse. Hocque *Logicum,* si $a = b$ & $b = c$ fuerit, tum $a = c$ esse, atque $b = a$. Hæc vero axiomata illis juncta sequentia suppeditant:

I et II) $x' = (x'|x)|\overline{x}$, & $x = \overline{x'}|(x'|x)$, seu, scripto jam $z$ pro $x'$, $z = (z|x)|\overline{x}$, & $x = \overline{z}|(z|x)$.

Posito enim $u = z|x$, erit ex ax. I et II (p. 6) $z = u|\overline{x}$ atque $x = \overline{z}|u$, itemque ex VII:o $u|\overline{x} = (z|x)|\overline{x}$, atque $\overline{z}|u = \overline{z}|(z|x)$, ideoque ex logico tum $(z|x)|\overline{x} = z$, tum $\overline{z}|(z|x) = x$. *Q. D. E.*

Obs. Jam vero hujusmodi demonstrandi formam ita compendiose expediamus, ut dicamus, valorem $z|x$ ipsius $u$ in hujus locum in æquatione $z = u|\overline{x}$ suffici seu *substitui,* quo statim $z = (z|x)|\overline{x}$ exoritur. Similiterque igitur substituendo eundem ipsius $u$ valorem in $x = \overline{z}|u$ obtinetur altera formula: $x = \overline{z}|(z|x)$. Complexum vero quodvis, dum substituitur, ut modo monuimus, uncinis ( ) cingendum est.

III et IV) $(z|\overline{x})|x = z$ & $\overline{(z|\overline{x})}|z = x$, seu $(z\ulcorner x)|x = z$ & $(z\ulcorner x)\urcorner z = x$.

Ponatur enim $y = z|\overline{x}$, eritque ex ax. III et IV (quia jam nulla signorum ambiguitas conceditur), $z = y|x$ atque $x = \overline{y}|z$, ideoque, valore $(z|\overline{x})$ ipsi $y$ suffecto, $z = (z|\overline{x})|x$ atque $x = \overline{(z|\overline{x})}|z$.

V et VI) $y|(\overline{y}|z) = z$ & $z|\overline{(\overline{y}|z)} = y$.

Ponatur enim $x = \overline{y}|z$, eritque ex ax. V et VI (p. 6) $y|x = z$ atque $y = z|\overline{x}$, ideoque valore ipsius $x$ suffecto, $y|(\overline{y}|z) = z$ atque $y = z|\overline{(\overline{y}|z)}$

Hæc axiomata verbis breviter exprimentur, si dixerimus quantitatem *positive* esse scriptam, quoties simplici vinculo | cum reliquis jungitur, *negative* vero, si præterea lineola (—) transpositionis (ideoque negationis) intercedit. Sic in formula $z|x$ tum $z$ tum $x$ positive, in $u|\overline{x}$ vero et $\overline{x}|u$ $u$ positive, $x$ vero negative adest. Jam igitur Cor. I, II, III et V hoc valent, ut "quantum, quod et positive et negative et quidem eodem modo adest, "scilicet utrumque vel ut antecedens vel ut consequens, omnino tollatur, "idemque ex Cor. IV et VI ei accidit, quod et positivum et complexe ne"gativum adest, prætereaque id quod bis negatur (sc. et simpliciter et "complexe in uncino negatur) simpliciter superest."

In casu præsenti illa axiomata idem omnino ac hæc corollaria valent. Hæc vero et ita explanari possunt.

1) Per $z|\overline{x}$ nihil aliud intelligimus quam valorem ipsius $y$ ex æquatione $z = y|x$ petitum; huic igitur necessario satisfiat, valore illo suffecto, ideoque erit $(z|\overline{x})|x = z$, (= III). Similiter per $\overline{y}|z$ intelligitur valor ipsius $x$ in $z = y|x$, ideoque erit identidem $z = y|(\overline{y}|x)$ (= V).

2) Quia identice est $x|y = x|y$, erit transponendo $x$ vel $y$, (II) $y = \overline{x}|(x|y)$, & $x = (x|y)|\overline{y}$ (= I)*).

*) Vel etiam demonstratio indirecte hunc in modum instituatur. I) Si fieri potest, sit $z = \overline{x}|(x|y)$, eritque, transponendo negatum $x$, $(x|z) = x|y$, atque auferendo $x$, $z$ nihil nisi $= y$, (quia scilicet functiones uniformes sunt).

3) Quia (III) jam $(z|\overline{x})|x = z$, erit, transponendo complexam quantitatem $(z|\overline{x})$, jam $x = \overline{(z|\overline{x})}|z$ (= IV); similiterque ex V) $z = y|(\overline{y}|z)$ obtinetur $z\overline{|}\,\overline{(\overline{y}|z)} = y$, (= VI) *).

Videmus igitur, quomodo hæc ex ipsis functionum inversarum definitionibus immediate fluant.

Formula vero II) id corroborat, quod antea de functione simplici $Fx$, ejusque inversa $\overline{F}y$ vel $\Finv y$ diximus. Posito enim $Fx = c$, $x = y$, ubi $c$ determinatum est, erit retro $x = \overline{c}$, $y = \Finv y$, ideoque ex formula $\overline{c},(c, x) = x$, (quæ idem valet ac $\overline{c}|(c|x) = x$, si vincula, et | jam eadem sunt), statim obtinetur $\Finv(c, x) = x$, seu $\Finv(Fx) = x$ seu $\overline{F}(Fx) = x$ rationi functionis inversæ convenienter. Præterea patet, has formulas $(z|x)|\overline{x}$, $\overline{x}|(x|z)$, $(z|\overline{x})|x$, $\overline{(x|\overline{z})}|x$, $x|(\overline{x}|z)$, & $x\overline{|}(\overline{z}|x)$ formam functionum ipsius $x$ mentiri, cum omnes ipsi $z$ æquentur, ideoque secundum $x$ constantes sint.

Est enim ex. gr. tum $(z|x)|\overline{x} = z$, tum $(z|x')|\overline{x'} = z$, exsistentibus $x$ et $x'$ quibusvis; ideoque $(z|x)|\overline{x} = (z|x')|\overline{x'}$; quod quidem constantiæ est criterium. Hinc vero ansam capimus exponendi hoc ad variabilia separanda utile *theorema:*

Si aliquo modo pervenerimus ad hujusmodi æquationem $(x) = (y)$, pro quibusvis variabilium $x$ et $y$ valoribus valentem, (ut modo $(z|x)|\overline{x} = z = (z|y)|\overline{y} = \overline{x}|(x|z)$ etc.), exsistente uncino ( ) functionis signo; hoc fieri aliter nequit, nisi ut utraque æquationis pars eidem constanti $c$ (seu quantitati, quæ neque ipsius $x$ neque ipsius $y$ sit functio) æquetur, sc. $(x) = c$ et $(y) = c$. Sit enim, si fieri posset, $(x)$ revera ipsius $x$ functio,

---

*) Vel etiam ita: quia, quoties $a|\overline{b} = c$, vel $\overline{c}|a = b$, etiam $a = c|b$, atque identice sit $z\overline{x} = z\overline{x}$, erit dextrum $x$ transponendo $(z|\overline{x})|x = z$, unde rursum migrando $(z\overline{x})$ colligitur IV) $x = \overline{(z|\overline{x})}|z$.

ideoque ejusmodi, ut una cum $x$ variet, sitque ita $(x) = c$, cum $x = x_0$, atque $(x) = c'$, cum $x = x_1$, nec tamen $c' = c$; interim vero $y$, quod una cum $x$ per hypothesin necessario non mutatur, valorem suum $y_0$ retineat, ideoque et illius functio $(y)$ vel $(y_0)$, quæ igitur necessario sit $= c$, quia universim $(y) = (x) = (x_0) = c$. Jam igitur $(y) = c$ a $c'$ est diversum, ideoque ulterius haud ipsi $(x)$ est æqualis; q. abs.

Necessario igitur sit $(x) = c$ et $(y) = c$, seu in $(x)$ ipsum $x$ et positive et negative ita adsit, ut se ipsum auferat ex formula $(x)$, (sicuti in $(c|x)\lceil x$ evenit), quæ igitur est formæ $C(ox)$ (seu functionis nullius $x$) seu constans, ut contendimus.

Cor. Si universim $\mathrm{F}(x) = F(u, x)$ ad quoscunque ipsorum $x$ et $u$ valores fuerit, et $u, x$ vera ipsorum $u$ et $x$ functio, erit utraque pars constans, vel etiam $u, x$ functio solius $x$.

Ponatur enim $u, x = y$, habeaturque interim $x$ constans, eritque ita $y$ vera functio solius $u$, ideoque, ipso $u$ variante, etiam $y$ variabit et quidem valores quoscunque, certos saltem intra limites, recipiet. Nostra igitur æquatio in hanc migrat $\mathrm{F}x = Fy$, in qua $x$ et $y$ varientur arbitrarie et a se invicem independenter (quamquam enim $u, x$ una cum $x$ variet, tamen hæc variatio tolli potest, ipsum $u$ certo modo variando); ideoque ex ax. præc. necessario sit $\mathrm{F}x = C$, et $Fy = C$, seu $F(u, x) = C$. Hinc vero rursum resolvendo obtinetur $u, x = \overline{F}C = c = \text{const.}$, et $u = c, \overline{x}$, ideoque foret $u$ functio ipsius $x$, id quod hypothesi adversatur. Hæc igitur contradictio aliter tolli nequit, quam ut $u, x$ formam tantummodo functionis ipsius $u$ mentiatur, ideoque exempli gratia sit $= (u, \mathfrak{f}x)$, $|\overline{u} = \mathfrak{f}x$, seu solius $x$ functio, ideoque $\mathrm{F}x = \mathfrak{f}x$, id quod licet. Hoc vero casu $u, x$ vera ipsorum $u$ et $x$ haud erit functio, ut ponebatur, sed tantummodo hujus $x$. Æquatio igitur proposita $\mathrm{F}x = F(u, x)$ impossibilis est, si $(u, x)$ vera utrorumque $x$ et $u$ est functio; id quod et inde patet, quod resolvendo obtineatur $u, x = \overline{\mathrm{F}}Fx$ seu $u, x = \varphi x$, h. e. $u, x$ sub forma functionis solius $x$.

**Post.** Data functione singulari ($F$), ipsius inversa dari potest, i. e. si fuerit $Fx = y$, erit vice versa $x$ functio quædam (Ⅎ vel $\overline{F}$) ipsius $y$, et igitur $x =$ Ⅎ$y = \overline{F}y$. (Præliminariter hoc tantum fere postulamus, ut functionis signum $F$ transponere liceat, olim prospecturi, quid specialius hoc signum $\overline{F}x$ indicet præter hoc, quod $\overline{F}(Fx) = x$ sit).

**Probl.** Si fuerit $G(\varphi x) = y$, ipsum $x$ invenire.

℞. Transponas primo $G$, deindeque $\varphi$, eritque $\varphi x = \overline{G}y$, atque $x = \overline{\varphi}(\overline{G}y)$.

**Cor.** Similiter, si fuerit $\psi(G(\varphi x)) = y$, (seu $(\psi G\varphi)x = y$), invenitur $x = \overline{\varphi}(\overline{G}(\overline{\psi}y))$; ideoque hoc unica transpositione ortum $\overline{(\psi G\varphi)}x$ idem valet ac $\overline{\varphi}(\overline{G}(\overline{\psi}x))$; quare functio functionis per utriusque inversas invertitur, et quidem functiones inversæ inverso ordine scribendæ sunt. Ex hac unica regula quæque æquatio, in qua ignota quantitas ($x$) unico tantum loco occurrit, solvitur. Ex. gr. $a + (b.x^n) = y$, mox $x = (\overline{b}.(\overline{a} + y))^{\overline{n}}$ seu $= \sqrt[n]{\frac{y-a}{b}}$ (in signis vulgaribus) subministrat.

**Def.** Universim si plura quanta arbitrarie varianda $x$, $y$, $z$ aliquo modo juncta aliud $u$ produxerint, hoc illorum *functio* dicitur, (sui enim valores cum valoribus illorum variant), id quod et ita significari potest: 1) $u = x\rfloor y\lfloor z$, quo casu $u$ *trium* argumentorum ($x$, $y$, $z$) est functio; vel 2) $u = x\rfloor y\lfloor z\rfloor t\ldots$ quatuor seu plurium, si plura quanta variabilia adfuerint. Viceversa vero unumquodque illorum erit *functio inversa* tum hujus tum illorum, et quidem si 1) $u = x\rfloor y\lfloor z$ fuerit, erit retro 2) $z = \overline{y}\lfloor\overline{x}\rfloor u$, 3) $x = u\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y}$, et 4) $y = \overline{x}\rfloor u\lfloor\overline{z}$ seu in signis aliquantum mutatis, 2) $z = y^{-}\lfloor x^{-}\rfloor u$, 3) $x = u\lfloor{}^{-}z\rfloor{}^{-}y$, 4) $x^{-}\rfloor u\lfloor{}^{-}z$. Ex principio vero reversionem unius functionis indicandi obtinetur quidem $z = \overline{x\rfloor y\lfloor u}$ et $x = u\rfloor\overline{y\lfloor z}$, (quæ igitur signa idem valent ac hæc $\overline{y}\lfloor\overline{x}\rfloor u$ et $u\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y}$), inde vero non obtinetur valor ipsius $y$, nisi formula $x\rfloor y\lfloor z$ aliter antea ordinatur, ut ex. gr. eadem sit ac hæc $y[x]z$, quo casu foret quidem

$y = u\overline{\lceil x \rceil} z$. Observandum vero est, illa *signa*, quæ aperte bene distincta sunt, ex eodem principio conficta esse: scilicet ad $z$ inveniendum fingimus primum $x$ deindeque $y$ transponi, ut habeamus quasi primum $\overline{x}\rfloor u = y\lfloor z$, deindeque $z = \overline{y}\lfloor(\overline{x}\rfloor u)$, ubi tamen tandem uncini (seu arcus Parenthetici) tollendi sunt, quia universim $z$ non sit $(=\overline{y}\lfloor t)$ functio ipsius $y$ aliusque $t$, quod $=\overline{x}\rfloor u$ seu functio duorum $x$ et $u$ sit, sed tantummodo $z$ functio trium argumentorum $x$, $y$ et $u$ est. Similiter ad $x$ obtinendum scribimus prævie, tametsi universim improprie, $x\rfloor y = u\overline{\lfloor z}$, deindeque $x = \overline{\lfloor z}\,\overline{\rfloor y}$ seu cum aliis copulis $x = u\lfloor^{-}z\rfloor^{-}y$. Tandem $y$ duplici via invenitur: sc.

1) $\overline{x\rfloor}\, u = y\lfloor z$ et $y = (\overline{x}\rfloor u)\overline{\lfloor z}$, vel

2) $x\rfloor y = u\overline{\lfloor z}$ et $y = \overline{x\rfloor}(u\lfloor z)$, quæ quidem, uncinis, uti decet, sublatis, conveniunt vel in $y = x^{-}\rfloor u\lfloor^{-}z$ rediguntur *).

Patet vero IV illas æquationes 1, 2, 3, 4 junctim locum habere, ideoque alterutra data, reliquas tres (necessario vel saltem disjunctive) inde colligi; ideoque ita duodenarius *axiomatum* numerus exorietur. Ut ex 1) et 2) quoties $u = x\rfloor y\lfloor z$, erit $z = \overline{y\lfloor}\,\overline{x\rfloor}\, u$, et vice versa. Inde vero quam plurimas reducendi formulas obtinebis, sufficiendo unius alteriusque quanti valores: ut, 2') $\overline{y\lfloor}\,\overline{x\rfloor}(x\rfloor y\lfloor z) = z$, nempe ipsius $u$ ex 1) petitum.

3') $(x\rfloor y\lfloor z)\overline{\lfloor z}\,\overline{\rfloor y} = x$ seu $(x\rfloor y\lfloor z)\lfloor^{-}z\rfloor^{-}y = x$.

4') $\overline{x\rfloor}(x\rfloor y\lfloor z)\overline{\lfloor z} = y$.

---

*) Datur etiam alius has functiones inversas designandi modus, quo $\bar{u}$ cum quantitate quæsita commutatur, ut ex $u = x\rfloor y\lfloor z$ obtineatur $x = \bar{u}\rfloor y\lfloor z$ et $y = x\rfloor \bar{u}\lfloor z$ atque $z = x\rfloor y\lfloor \bar{u}$; sed tum $u$ negative (seu quasi transposita) occurrit, cum tamen duo reliqua argumenta transponenda sint, et quidem inverso ordine; nec signa, uti decet, negantur. Hic igitur modus, quamquam commoditate quadam gaudeat, principio stabito minus convenit.

Ubi facile intelligitur, quanta itemque signa $\rfloor\lfloor$ similiter et positive et negative (oppositoque ordine) scripta tolli; et simile quid in reliquis observes, ubi et bis negata affirmantur. Scilicet substituendo

$$2)\ z=\overline{y}\lfloor\overline{x}\rfloor u,\ \text{fit}\quad 1'')\ x\rfloor y\lfloor(\overline{y}\lfloor\overline{x}\rfloor u) = u$$

$$3'')\ u\overline{\lfloor}\left(\overline{y}\lfloor\overline{x}\rfloor u\right)\overline{\rfloor}y = x$$

$$4'')\ \overline{x}\rfloor u\lfloor^{-}\left(\overline{y}\lfloor\overline{x}\rfloor u\right) = y$$

$$3)\ x=u\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y},\quad 1''')\ (u\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y})\rfloor y\lfloor z = u$$

$$2''')\ \overline{y}\lfloor\left(u\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y}\right)^{-}\rfloor u = z$$

$$4''')\ \left(u\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y}\right)^{-}\rfloor u\lfloor\overline{z} = y.$$

$$4)\ y=\overline{x}\rfloor u\lfloor\overline{z},\quad 1^{\text{IV}})\ x\rfloor\left(\overline{x}\rfloor u\lfloor\overline{z}\right)\lfloor z = u$$

$$2^{\text{IV}})\ \left(\overline{x}\rfloor u\lfloor\overline{z}\right)^{-}\lfloor\overline{x}\rfloor u = z$$

$$3^{\text{IV}})\ u\lfloor\overline{z}\rfloor^{-}\left(\overline{x}\rfloor u\lfloor\overline{z}\right) = x.$$

Duplici vero substitutione adhibita obtinentur: $\left(u\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y}\right)\rfloor y\lfloor\left(\overline{y}\lfloor\overline{x}\rfloor u\right) = u$, et similia; vel etiam triplici, ut $((x\rfloor y\lfloor z)\lfloor\overline{z}\rfloor\overline{y})\rfloor y\lfloor(\overline{y}\rfloor\overline{x}\rfloor(x\rfloor y\lfloor z)) = x\rfloor y\lfloor z$ etc. quæ tamen nimis complexa sunt, ut usui commode aptentur.

Similia signa ad functiones plurium argumentorum invertendas fingi et axiomata demonstrari possent, sed jam ad simpliciores formas regrediendum est. — Obiter vero hoc annotandum est, functionum triplicium (i. e. trium argumentorum) eas præcipue disquirendas esse, quæ simplicissime ex duplicibus orginem ducunt, præsertimque has, quæ æquationem hujusmodi $x\rfloor u = y\lfloor z$ solvendo obtinentur, sc.

$y=(x\rfloor u)\lfloor\overline{z}$, vel $x=\lfloor\overset{\frown}{y\lfloor z}\rfloor\overline{u}$ vel

$u=\overline{x}\rfloor\overset{\frown}{y\lfloor z}$ vel $z=\overline{y}\ \overset{\frown}{x\rfloor u}$, quæ quidem functiones triplices aperte ad functiones duarum quantitatum, quarum tamen alterutra est functio *dualis*, rediguntur, ut uncini commonstrant, et ante omnes ea, quæ hac proprie-

tate gaudeat, ut $(x|u)|z = x|(u|z)$ sit, (sicuti ex duplici illius $y$ valore p. 14. 1) & 2) modo in hujus signo disquirendo obtento, suspicari licet*).

His jam taliter qualiter universim prælibatis, quo aliquæ *notiones* (S. Definitiones) atque *axiomata* in memoriam breviter revocavimus, *signaque* quædam necessaria ex unico principio concinnata explicuerimus, jam forsan perspexeris, quorsum tota hæc oratio tendat. Noveris scilicet, Mathesin jam quoad *quantitates* ipsas maxima gaudere universalitate, ut ex. gr. in formula quacunque proposita in locum litterarum valores quoscunque numericos (saltem limitibus tantum quibusdam utcunque circumscriptos) sufficere liceat. Quæ cum ita sint, merito quæritur, numne hæc scientia, quæ itaque quoad suam ipsius *materiam* tam late pateat, etiam quoad *formam* æquali gaudeat universalitate, ut ex. gr. in locum generalis cujusquam operationis signum | varia alia, ut $+$ $\times$ vel plura, sufficere liceat? Cui quæstioni ut respondeatur, amplior *operationum theoria* condenda, *signorumque systema sibi consentaneum* inveniendum fuit. — Haud vero neque hodie primum vel nudius tertius has res meditati fuimus; sed jam admodum juvenes, cum, scientiam tam excultam ulterius parum promoveri posse, nostratibus consentanei censuimus, analyseos saltem elementa ab omni scepticismo liberata in meliorem ordinem, quam qui in libris elementaribus vulgo circumferebatur, redigenda credidimus. Hunc in finem, cum plura observavimus dari, quæ neque speciatim Arithmeticen neque Geometriam tangant, sed potius utrisque communia sint, *doctrinam*

---

*) Geometris per familiare est, functiones duorum vel plurium argumentorum ($x$ et $y$) diversas per diversas litteras indicare, ut $F(x, y)$, $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y, z)$, etc.; sed superfluum nobis videtur, litteras otiosas (quæ quantitatem haud significant) admittere (præter in functione simplice); sed melius duximus, hanc diversitatem per vincula varie conformata indicare, sicuti jam in elementis consueverunt $x + y$ et $x . y$, nec $S(x, y)$ et $\Pi(x, y)$ scribere. Formulæ ita enim concinniores evadunt, ut $(x|y)|z = x|(y|z)$ pro $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$. Inde etiam functionum ideas facilius juvenes sensim concipiunt.